Trabajo Practico No XX

Conductividad térmica de gases

OBJETIVO: Determinar la conductividad térmica de gases, χ_T, en función de la presión utilizando el método del alambre caliente (“hot-wire”), en régimen estacionario y transitorio. Analizar la ecuación del balance de calor para la geometría cilíndrica dada por: un alambre delgado de platino rodeado del gas a estudiar.

Usando la teoría cinética para un gas de esferas duras puede verse que la conductividad térmica de un gas está relacionada con los parámetros microscópicos: diámetro de colisión y camino libre medio. Se analizará la dependencia de χ_T con la presión, en régimen difusivo y de Knudsen.

---

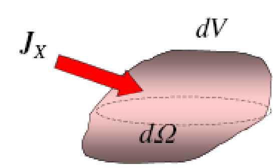
1. Introducción teórica:

La ecuación fenomenológica asociada al transporte de calor es la **ecuación de Fourier:**

$$J_Q = -\chi_T \nabla T \qquad \text{(e1)}$$

donde J_Q es la cantidad de calor transportado a través de una superficie por unidad de área y de tiempo, χ_T es el **coeficiente de conductividad térmica** y ∇T el gradiente de temperatura en la superficie.

La variación temporal de energía térmica en un elemento de volumen dV y área $d\Omega$ se debe al flujo de calor normal a la superficie y a la producción local de calor $q(t)$ (positiva si es una fuente, y negativa si es un sumidero de calor):



$$\frac{\partial Q_V}{\partial t} = -\int_{\Omega} J_Q d\Omega + q(t)$$

donde Q_V es el calor por unidad de volumen. Mediante el Teorema de Gauss la expresión anterior se convierte en:

$$\frac{\partial Q_V}{\partial t} = -\int_V \nabla . \boldsymbol{J}_Q dV + q(t) \qquad \text{dónde: } \nabla\cdot\boldsymbol{J} = \partial J_x/\partial x + \partial J_y/\partial y + \partial J_z/\partial z$$

que es la **ecuación del balance de calor**. Teniendo en cuenta la ecuación de Fourier y que $\partial Q_V = \rho C_V dT$ (donde C_V es la capacidad calorífica específica a volumen constante y ρ la densidad del material), la ecuación anterior se convierte en:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\chi_{\mathrm{T}}}{\rho C_V}\nabla^2 T + \frac{q(t)}{\rho C_V} \qquad \text{(e2)}$$

Esta expresión, equivalente a la segunda ley de Fick para el transporte de masa, muestra la variación espacio-temporal de la temperatura en un sistema cuando existe un gradiente de temperatura (flujo de calor).

Por otro lado, la teoría cinética de los gases nos provee de una expresión para la conductividad térmica, en el régimen difusivo (camino libre medio menor que el tamaño del recipiente):

$$\chi_{\mathrm{T}} = \frac{8C_{\mathrm{v}}}{3\sigma}\left(\frac{kT}{\pi\, m}\right)^{1/2} \qquad \text{(e3)}$$

donde C_{v} es la capacidad calorífica del gas, m la masa de la molécula y σ es la sección eficaz de choque ($\sigma = \pi\phi^2$, donde ϕ es el diámetro de colisión).

Cuando el camino libre medio del gas se hace mucho mayor que las dimensiones características del recipiente que contiene al gas, el régimen de transporte cambia del régimen difusivo (colisiones entre moléculas) al **régimen de Knudsen** (colisiones con las paredes) y la expresión (e3) ya no reproduce correctamente el comportamiento de la conductividad térmica. Sin embargo, en estas condiciones de baja presión, aún es posible estimar la conductividad térmica (aparente) del gas, χ_{ap}, a partir de: $\chi_{\mathrm{ap}} \approx \chi_{\mathrm{T}}(3/4\,\mathrm{K_n})$, donde $\mathrm{K_n}$ representa el número de Knudsen, definido por λ / r, donde λ es el camino libre medio y r es la dimensión característica del recipiente. En este régimen, se puede ver que χ_{ap} se torna dependiente de la densidad del gas:

$$\chi_{\mathrm{ap}} = 2\,C_{\mathrm{v}}\; r\; \rho\left(\frac{2kT}{\pi\, m}\right)^{1/2} = 2\,C_{\mathrm{v}}\; r\;\, p\left(\frac{2}{\pi\, m\, kT}\right)^{1/2} \qquad \text{(e4)}$$

2. Fundamento del método del alambre caliente:

2.1. Método Estacionario:

Si se hace pasar una corriente eléctrica a través de un alambre de platino, éste incrementará su temperatura hasta alcanzar un estadio estacionario. Es decir que, en estas condiciones, el trabajo eléctrico entregado por la fuente al alambre, por unidad de tiempo, se igualará al calor entregado al medio gaseoso del entorno (disipación de calor por conducción, convección y radiación). La pérdida de calor por conducción involucra mayormente a la presencia del gas del entorno (a través de su conductividad térmica). Por otro lado, la transferencia calor por radiación puede minimizarse si la temperatura del alambre se mantiene por debajo de 400°C.

En cualquier caso, el uso de la ecuación (e2) requiere conocer cómo va variando la temperatura del alambre de platino al calentarse, lo que puede hacerse monitoreando la resistencia de la misma. El cambio medido en la resistencia del alambre de platino nos permitirá conocer el cambio de temperatura, usando la expresión:

$$R/R_0 = 1 + \alpha(T_1 - T_1^0) \Rightarrow \Delta R = R_0 \alpha \Delta T \qquad \text{(e5)}$$

donde la constante α para el platino vale 0.003927 K^{-1}.

Si se asume que tanto la convección como la conducción de calor a través de los bornes metálicos conectados con el alambre son bajas, el balance de calor (e2) en estado estacionario se transforma en:

$$0 = \chi_T \nabla^2 T + q \qquad \text{(e6)}$$

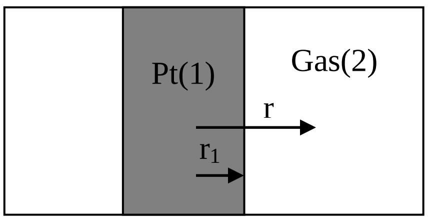
donde q es la potencia disipada en forma de calor, por unidad de longitud del alambre (cuando circula una corriente i por un alambre de longitud l y resistencia R, $q = i^2 R/l$). Integrando la ecuación (e6) y teniendo en cuenta la geometría del experimento se obtiene:

$$i^2 R = 2\pi \chi_2 l\,(T_1 - T_1^0) / \ln(d_{\text{ext}} / d_{\text{int}}) \qquad \text{(e7)}$$

donde T_1^0 y T_1 corresponden a las temperaturas del alambre antes y después de calentarse, d_{int} es el radio del alambre, y d_{ext} es el radio del recipiente que contiene al gas.

2.2. Método Dinámico:

El método del alambre caliente transitorio ha sido ampliamente utilizado para la determinación de la conductividad térmica de fluidos debido a que éste elimina los efectos convectivos. Consiste aplicar, a partir de un dado tiempo t = 0, una corriente eléctrica constante a través de un alambre delgado de platino (1), rodeado del gas (2) a estudiar. De esta manera, el trabajo eléctrico aplicado posee un perfil temporal con forma de escalón. El método consiste en registrar la variación de temperatura del alambre en función del tiempo, a partir del cambio de la resistencia eléctrica del mismo. En este caso, debe resolverse la ecuación del balance de calor dependiente del tiempo (e2). Para una geometría experimental cilíndrica:



$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_1}{\partial r} - \frac{1}{\alpha_1}\frac{\partial T_1}{\partial t} = -\frac{q}{\pi\, r_1^2 \chi_1} \qquad \text{(e8)} \quad \text{para:} \quad 0 \le r \le r_1$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T_2}{\partial r} - \frac{1}{\alpha_2}\frac{\partial T_2}{\partial t} = 0 \qquad \text{(e9)} \quad \text{para:} \quad r > r_1$$

donde las distancias radiales se miden desde el centro del alambre de platino, de radio r_1.

Las condiciones de contorno son:

i) $T_1^0 = T_2^0$ para $t \le 0$, es decir antes de hacer circular corriente por el alambre de Pt.

ii) $T_1(t) = T_2(t)$ en $r = r_1$.

iii) $\chi_1 \frac{\partial T_1}{\partial r} = \chi_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}$ en $r = r_1$, es decir que el flujo de calor que sale del alambre es igual al que recibe el gas en la superficie del alambre.

iv) $T_2(t) = T_2^0$ para $r \to \infty$, es decir que los efectos de borde son despreciables.

Como sólo mediremos la temperatura en el alambre, nos interesa la expresión de T_1 que resulta de resolver las ecuaciones (e8) y (e9), para el caso particular de un alambre cilíndrico de radio r_1 y temperatura uniforme. Si el diámetro del alambre se elige de modo tal que $r_1^2 << 4\alpha_2 t$, se llega a la expresión:

$$T_1(t) - T_1^0 = \frac{q}{4\pi\chi_2}\left(\ln\frac{4\alpha_2 t}{C\, r_1^2} + \frac{r_1^2}{4\alpha_2 t} + ...\right) \qquad \text{(e10)}$$

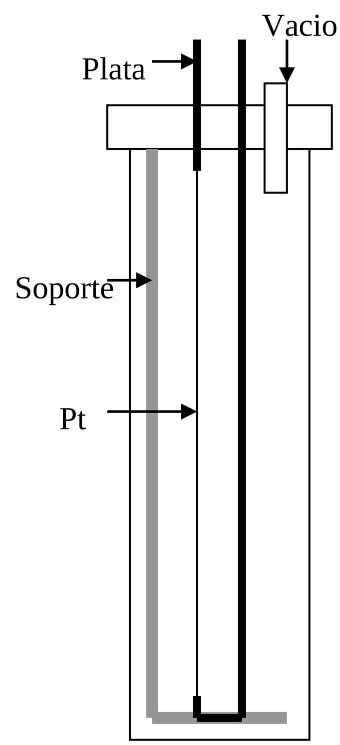
donde C =1.7810 (exponencial de la constante de Euler). Teniendo en cuenta que el segundo término en el paréntesis de la ecuación (e10) es pequeño frente al primero (sólo 3x10^{-5} % para He y 3x10^{-4} % para N_2), la ecuación anterior se reduce a:

$$T_1(t) - T_1^0 = \frac{q}{4\pi\chi_2} \ln\left(\frac{4\alpha_2 t}{C\, r_1^2}\right) \qquad \text{(e11)}$$

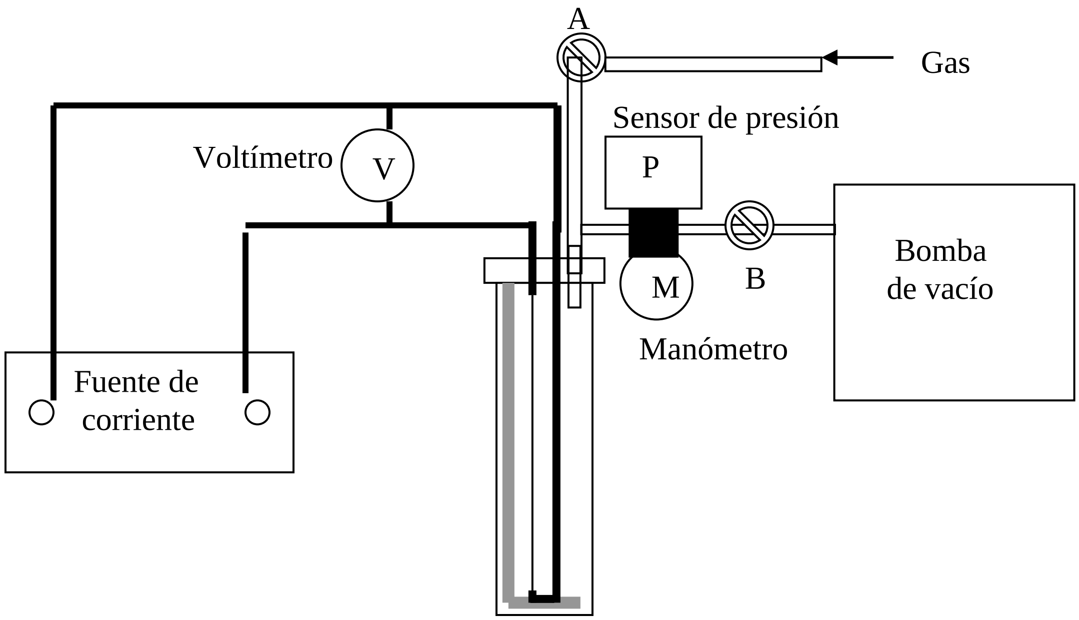
La expresión (e11) es la ecuación de trabajo del método. La conductividad térmica del gas se obtiene de la pendiente del gráfico $T_1(t) - T_1^0$ vs. $\ln t$. De igual forma que para el método estacionario: $q = i^2 R / l$.

3. Parte experimental

El gas a estudiar se introduce en una celda como la de la figura. La celda dispone de un alambre de Pt de 50 μm de diámetro y 0.3 m de longitud, es soldado a dos soportes gruesos de Ag. De esta manera, la resistencia eléctrica del conjunto es básicamente la del alambre de Pt. Este conjunto está solidario a una tapa-brida que se sella sobre un recipiente cilíndrico donde se encuentra el gas en estudio. Un orificio en esta tapa permite conectar el recipiente a una bomba de vacío para fijar la presión (densidad del gas). La separación entre el alambre de Pt y el soporte es de varios mm, de modo de minimizar los efectos de borde.



La figura siguiente muestra el arreglo experimental completo para medir el coeficiente de conductividad térmica. Antes de introducir el gas a estudiar en la celda, haga vacío en todo el sistema. Para ello, cierre la válvula aguja A, encienda la bomba de vacío, y finalmente abra la válvula B. A continuación, cierre B y apague la bomba **[IMPORTANTE: cierre siempre la válvula B antes de apagar la bomba de vacío]**.



Purgue el recipiente con el gas a estudiar. Para ello, deje entrar unos 100 Torr del mismo a través de la válvula aguja A, despacio, controlando siempre la presión en el manómetro M (para presiones de 50-760 Torr), o con el sensor Pirani (por debajo de 50 Torr). Con A cerrada, vuelva a hacer vacío (para ello: cierre A, prenda la bomba, y recién después abra B). Finalmente, cierre B, recién después apague la bomba, y seguidamente deje entrar el gas. Al alcanzarse la presión deseada, cierre la A y proceda a realizar la medida. Para mantener constante una presión baja (por ej. 1 Torr), es posible que se requiera dejar correr un flujo muy pequeño de gas (abriendo levemente A), para compensar pequeñas pérdidas en el equipo.

Emplearemos como gases de estudio: aire y He. Para intercambiarlos, existe una válvula plástica de 3 vías. **IMPORTANTE: Nunca ajuste la válvula reguladora de presión del tubo de He por encima de 1 bar. Al cargar He en el sistema, siempre comenzar con la válvula A cerrada, y vaya abriéndola con cuidado hasta alcanzar la presión deseada. NO OLVIDE CERRAR EL TUBO DE He AL FINALIZAR ESTA OPERACION.**

Para usar las ecuaciones de trabajo (e7), en el método estacionario), y (e11), en el método dinámico, se necesita determinar la temperatura del alambre. Esto se hace utilizando el mismo alambre de platino como termómetro. El procedimiento es simple: se enciende la fuente de corriente en una escala determinada (ver luego), y se mide la corriente con un amperímetro y la caída de tensión en el alambre de platino con un voltímetro. Finalmente, se calcula R con la ley de Ohm, a partir de cuyo valor se determina T usando la ecuación (e5).

3.1. Medida en estado estacionario

Fijar la presión del gas a 760 Torr y seleccionar en la fuente la escala de corriente de 150 mA.

Para determinar la temperatura inicial del alambre y del gas que lo rodea ($T_1^0 = T_2^0 \approx T_{\text{amb}}$), emplee una corriente muy baja para evitar que el calentamiento del alambre arroje un valor erróneo. Posicione entonces el selector de la fuente de corriente en la escala de 1mA, y proceda normalmente: mida la tensión con el voltímetro (en este caso, será de unos pocos mV) y la corriente con el amperímetro, y use luego (e5) para calcular $T_1^0 = T_2^0$.

Luego, cambie el selector de la fuente de corriente a la escala de 150 mA, para proceder a efectuar las medidas de χ. Luego de esperar 1 o 2 minutos hasta que se establezca el gradiente de temperatura (estado estacionario), tome las lecturas de tensión y de corriente. Introduzca los valores medidos en la planilla de cálculo, y obtenga χ en esas condiciones. Use en el cálculo los valores de las dimensiones del alambre y de la celda, y de la constante térmica del Pt.

Repita el experimento a presiones menores, por ej.: 100, 10, 3 Torr. En este ámbito de presiones, la temperatura del alambre se mantendrá entre 60-100 ºC, en el caso de aire, y ésta será algo menor, cuando trabaje con He.

Repita el experimento a presiones menores; por. ej. 1 y 0.5 Torr. **IMPORTANTE: Para realizar estas medidas, seleccione la fuente de corriente en la escala de 100 mA.** Disminuir la corriente responde a que, en este ámbito de presión, la disipación de calor es mucho menor y, por lo tanto, el trabajo eléctrico deberá reducirse para que la temperatura del alambre se mantenga en valores razonables. A presiones por debajo de 1 Torr, aún habiendo bajado la corriente a 100 mA, la temperatura del alambre alcanzará aproximadamente los 150 ºC, en el caso de aire (ΔT será algo menor para He, debido a su mayor conductividad térmica).

Una vez calculados los valores de conductividad térmica del gas, grafíquelos vs. *p*. También grafique la temperatura del alambre, por unidad de calor aplicado, en función de *p*. Finalmente, utilice la expresión (e3) para estimar el diámetro de colisión de las moléculas, y compare con los valores tabulados. Determine el ámbito de presión en el cual se produce la transición del régimen difusivo al régimen de Knudsen.

3.2. Medida dinámica

Cargue aire a una presión de 760 Torr y mantenga la fuente APAGADA **en la escala de 100 mA**. La medida dinámica se iniciará al "encender" la fuente de corriente. En ese momento, un escalón de corriente iniciará el calentamiento del alambre, y simultáneamente se iniciará la transferencia de calor desde el alambre hacia el gas que la rodea. Ese flujo de calor dependerá de la conductividad térmica del gas y por tanto el alambre se calentara más rápido, cuanto menor sea la conductividad térmica del entorno (gas en estudio).

La medida dinámica (volts vs. tiempo) se registrará con un osciloscopio, según el procedimiento que se describe a continuación:

OSCILOSCOPIO:

1) Introducir un pen-drive en el equipo.

2) Condiciones de disparo. Active el modo SINGLE (la tecla RUN se pone en rojo). El trigger se pone en "disparo único". Nivel de trigger: +0.5 V, lugar disparo: 1 s contado desde la izquierda. Escala horizontal: 500 ms/div (la pantalla completa será de unos 9 s). Escala vertical: empezar con 0.5 V/div. Como la intención es medir una pendiente muy baja (zona horizontal), es útil que haya buena resolución vertical en la adquisición. Repetir entonces la medida en la escala de 0.2 V/div (como la traza alcanza ~1.6 V después del salto térmico, deberá ajustarse el offset vertical antes de iniciar el disparo).

3) Adquisición de datos. Antes de la medida, oprimir la tecla RUN y **esperar** que el equipo se "arme" (unos 10 s). **Esperar unos segundos más** antes de dar inicio a la medida. Para ello, encienda la fuente de corriente. En unos 10 s aparecerá la traza en la pantalla. **IMPORTANTE: Al ver la traza, APAGUE LA FUENTE.** A continuación, proceda a grabar el contenido de la memoria de pantalla en el pen-drive.

4) Grabado del archivo de datos. Con la traza en pantalla, en el menú de SAVE confirmar que el tipo de archivo esté seleccionado en CSV. Presionar SAVE y esperar unos segundos. Luego, presionar MODIFY: FILES, luego NEW FILE (el equipo asigna un nombre por defecto, que debe anotarse), y finalmente presionar CONFIRM. Esperar a que se grabe el archivo en el pen-drive, y confirmar que no haya errores (a veces hay que repetir la operación). Para volver a la pantalla de adquisición, se oprime: NEXT PAGE, y luego RETURN.

Advierta que la traza (V vs. t) tiende a alcanzar rápidamente el valor estacionario (de aproximadamente 1.6 V), y lo que se pretende es medir esa pequeña pendiente de calentamiento. Esto se hace en una planilla de cálculo. Se IMPORTA el archivo CSV (comma-separated-values), asegurándose que el delimitador sea la "coma". Cambie la columna "tiempo" a ln (t + 5). Nota: Se debe sumar arbitrariamente el número 5, porque el osciloscopio comienza la escala horizontal en tiempos negativos. Grafique la columna "tensión" vs. ln (t + 5), y recorte la parte cuasi-horizontal (deberá descartar el inicio de la traza). Realice un ajuste lineal de esta región del gráfico, para obtener el valor de la pendiente. Para cambiar la pendiente [V en función de ln (t + 5)] a: $[T_1(t) - T_1^0(t)$ en función de ln (t + 5)], el valor debe dividirse por $R_0\alpha$, tal como está programado en la planilla de cálculo. De dicho valor de pendiente extraiga la conductividad térmica del gas, de acuerdo con (e11).

4. Cuestionario

1) A partir de la expresión para el camino libre medio de un gas de esferas duras estime la presión a la cual el camino libre medio del gas es del orden del tamaño del recipiente. ¿Qué sucede con las propiedades de transferencia de calor del gas cuando se trabaja a presiones menores que ese límite? (asocie este resultado al caso práctico de un termo o vaso de Dewar).
2) ¿Se tiene en cuenta en este método la energía irradiada en el IR por el alambre caliente? ¿Estime a partir de qué temperatura del alambre esta corrección sería del 1%?
3) ¿Por qué el He posee mayor conductividad térmica que el N_2?
4) Reordenando la ecuación (e3) se concluye que, según la teoría cinética de los gases, la conductividad térmica de un gas es proporcional a su capacidad calorífica, y al producto (velocidad media x densidad x camino libre medio). Según la misma teoría, la viscosidad dinámica de un gas también resulta proporcional al producto (velocidad media x densidad x camino libre medio). ¿Significa esto que en la práctica la conductividad térmica es proporcional a la viscosidad del gas?

5. Bibliografía

H. S. Carslaw y J. C. Jaeger; Conduction of Heat in Solids, Oxford University Press (1959)