

Trabajo Práctico 3- Teoría lineal. Relación de dispersión.

1) La relación de dispersión obtenida en la teoría lineal de olas está dada por:

$$\omega^2 = g k \tanh(k h) \quad (1)$$

donde ω es la frecuencia angular, g la aceleración debida a la gravedad, k el número de onda y h la profundidad. Definiendo a $x = (k h)$ y $\beta = (\omega^2 h / g)$, dicha ecuación puede escribirse como:

$$(\beta / x) = \tanh(x) \quad (2)$$

Considerando que el período de la ola y la profundidad son datos, escribir un programa que resuelva la ecuación (2) utilizando un método iterativo convergente, tal que la iteración finalice cuando la diferencia entre dos soluciones consecutivas sea inferior a un valor propuesto de antemano (ε):

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \quad (3)$$

Comenzar la iteración con x_0 obtenido con k_{APP} y k_{AP} . Comparar, en cada caso, el número de iteraciones necesarias para la convergencia. Analizar cuál de las dos opciones es la más conveniente. Repetir el procedimiento para un valor de número de onda obtenido de las formulaciones de soluciones aproximadas a la ecuación de dispersión. (3.5. Appendix: Approximate solutions to the dispersion equation, Dean & Dalrymple, 1984, págs. 71-72). ¿En cuántos pasos iterativos se obtuvo una solución?

Si fuera posible hacer un gráfico esquemático que explique el funcionamiento su método iterativo y demostrar que es convergente en el rango de valores correspondiente a las olas.

Considerar profundidades de 1, 15 y 40 metros y períodos de olas comprendidos entre 1 y 15 s, cada segundo (es decir, 1, 2, 3, ..., 13, 14 y 15 s). Con el programa desarrollado calcular los siguientes parámetros para cada par de valores:

- L, longitud de onda,
- c, velocidad de fase o celeridad,
- c_g , velocidad de grupo,
- decir, para cada caso, si corresponde a AP, AI o APP,
- comparar los valores obtenidos con los de la tabla del SPM,
- para cada profundidad, graficar el período en función de la longitud de onda.

Comparar los resultados obtenidos con el "Wave Calculador" de Dalrymple.

2) En longitudes de onda muy cortas (milímetros a centímetros), la fuerza restauradora de ondas en el agua es la tensión superficial y las ondas se llaman ondas capilares. En longitudes de onda ligeramente más largas, las ondas en la superficie del agua son un paso intermedio entre ondas capilares y ondas de gravedad y la teoría conduce a la siguiente relación de dispersión:

$$\omega = \sqrt{k (g + \gamma k^2) \tanh(kH)} ,$$

En dónde γ es un parámetro relacionado con la tensión superficial, una propiedad conjunta de ambos fluidos en contacto en la superficie, k es el número de onda y H la profundidad. Debido a que la aceleración de la gravedad $g=9.81 \text{ m/s}^2$ y el parámetro de la tensión superficial $\gamma=7.38 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3/\text{s}^2$ para el contacto agua-aire, la corrección γk^2 es importante sólo en longitudes de onda relativamente cortas.

(a) ¿Para qué longitud de onda el término de corrección de la tensión superficial es igual al término gravitacional?

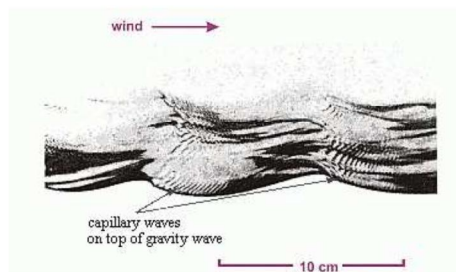
(b) Si la profundidad es $H=3\text{m}$, indique si las ondas que tengan la longitud de onda calculada en (a) pueden ser consideradas ondas de aguas profundas, aguas intermedias o aguas poco profundas.

(c) Simplifique la relación de dispersión de acuerdo a lo concluido en (b)

En base a esta ecuación simplificada, encuentre la expresión para la velocidad de fase y la velocidad de grupo. Haga un diagrama de la relación C_g/C en función de la longitud de onda e indique en el mismo los límites en dónde sólo actúa la tensión superficial (ondas capilares) y en dónde sólo actúa la gravedad (ondas de gravedad).

(d) ¿Cuál es la diferencia principal entre la propagación de energía entre ondas de gravedad y ondas capilares?

(e) Luego de arrojar una piedra en un lago, se generan ondas que se propagan en un patrón circular alejándose del punto en dónde cayó la piedra. ¿Dónde se verán las ondas capilares en este patrón, cerca del centro o en el borde inferior de este patrón circular?



Ondas capilares sobre ondas de gravedad.