Práctica de Cálculo de Secuentes

Eduardo Bonelli

TP para LP – 2012C1

Ejercicio 1 Construir derivaciones en **G2m** de las siguientes fórmulas (nota: $A \leftrightarrow B$ se define como $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$):

1. $((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \supset (A \vee (B \wedge C))$
2. $(A \supset B) \supset (B \supset C) \supset (A \supset C)$
3. $A \supset (B \supset (A \wedge B))$
4. $(A \vee B \supset C) \supset (A \supset C) \wedge (B \supset C)$
5. $A \supset \neg\neg A$
6. $\neg\neg\neg A \leftrightarrow \neg A$.
7. $A \vee B \supset \neg(\neg A \wedge \neg B)$
8. $\neg\neg(A \wedge B) \supset \neg\neg A \wedge \neg\neg B$
9. $\neg(A \vee B) \leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
10. $\neg\neg(A \supset B) \supset (A \supset \neg\neg B)$
11. $\neg\neg(A \supset B) \supset (\neg\neg A \supset \neg\neg B)$
12. $\forall x.(A \supset B) \leftrightarrow (A \supset \forall y.B\{x := y\})$ ($x \notin FV(A)$, $x \equiv y$ or $y \notin FV(B)$)

Ejercicio 2 Construir derivaciones de las siguientes fórmulas en **G2i**:

1. $A \supset (\neg A \supset B)$
2. $\neg\neg\neg A \supset \neg A$
3. $\neg\neg(A \vee \neg A)$

Ejercicio 3 Construir derivaciones de las siguientes fórmulas en **G2c**:

1. (Law of double negation) $\neg\neg A \supset A$

2. $(A \supset \neg\neg B) \supset \neg\neg(A \supset B)$

3. $A \supset (\neg A \supset B)$

4. $A \vee B \leftrightarrow \neg(\neg A \vee \neg B)$

5. (Pierce's Law) $((A \supset B) \supset A) \supset A)$

6. $\exists x.A \leftrightarrow \neg\forall x.\neg A$

Ejercicio 4 Mostrar que los siguientes esquemas de inferencia son intercambiables en **G2m**:

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma \vdash \Delta, B}{\Gamma \vdash \Delta, A \wedge B} R\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad \Gamma' \vdash \Delta', B}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta, \Delta', A \wedge B} R\wedge'$$

Ejercicio 5 Probar que los axiomas en **G**[**12**][**mic**] pueden restringirse a fórmulas *prime* (i.e. atómicas o $\perp$).

Ejercicio 6 Mostrar que los siguientes esquemas son derivables en **G1c**:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg A} R\neg \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, A}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} L\neg$$

Ejercicio 7 Completar los casos de prueba del *Reduction Lemma* y desarrollar el resultado principal de eliminación de corte.

Ejercicio 8 Un esquema de inferencia se dice *invertible* si a partir de la derivabilidad de cualquier instancia del secuente de la conclusión pueden derivarse las correspondientes instancias de las premisas.

1. Mostrar que los siguientes esquemas no son invertibles:

$$\frac{A_0, \Gamma \vdash \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \vdash \Delta} L\wedge_0 \qquad \frac{A_1, \Gamma \vdash \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \vdash \Delta} L\wedge_1$$

2. Mostrar que la siguiente variante (con la que se reemplazan las dos del inciso anterior) sí es invertible:

$$\frac{A_0, A_1, \Gamma \vdash \Delta}{A_0 \wedge A_1, \Gamma \vdash \Delta} L\wedge$$

Ejercicio 9 Mostrar que el esquema

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \supset B, \Gamma \vdash \Delta} L \supset$$

no es invertible.

Ejercicio 10 El cálculo de secuentes (CS), tal como se presentó en clase, corresponde a la lógica *pura* de predicados. Supongamos que se desean agregar axiomas al CS de modo de poder inferir propiedades sobre elementos específicos. Por ejemplo, agregar axiomas que versen sobre números naturales para poder inferir propiedades sobre la aritmética. El siguiente ejercicio plantea la dificultad de adaptar el teorema de eliminación de corte a esta situación.

1. Supongamos que se agregan los axiomas $\vdash P \supset Q$ y $\vdash P$. Dar una derivación de $\vdash Q$ apelando a Cut.
2. Argumentar que no es posible construir una derivación de $\vdash Q$ sin Cut.

Nota: El interesado puede consultar una posible manera de abordar esta problemática en [NvP01].

Ejercicio 11 Considere la siguiente presentación, **G3i**, de la lógica intuicionista proposicional:

$$\frac{}{P, \Gamma \vdash P}\,Ax \qquad \frac{}{\bot, \Gamma \vdash C}\,L\bot$$

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash C}{A \wedge B, \Gamma \vdash C}\,L\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,R\wedge$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash C \quad B, \Gamma \vdash C}{A \vee B, \Gamma \vdash C}\,L\vee \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,R\vee_0 \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,R\vee_1$$

$$\frac{A \supset B, \Gamma \vdash A \quad B, \Gamma \vdash C}{A \supset B, \Gamma \vdash C}\,L\supset \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \supset B}\,R\supset$$

Usaremos $\Gamma \vdash_n A$ para indicar que el secuente $\Gamma \vdash A$ tiene una derivación de altura **a lo sumo** n.

1. Probar que $C, \Gamma \vdash C$ para todo C
2. Probar (height preserving) Weakening: si $\Gamma \vdash_n C$, entonces $D, \Gamma \vdash_n C$, para cualquier D.
3. Probar (height preserving) Inversion:
   a) Si $A \wedge B, \Gamma \vdash_n C$, entonces $A, B, \Gamma \vdash_n C$
   b) Si $A \vee B, \Gamma \vdash_n C$, entonces $A, \Gamma \vdash_n C$ o $B, \Gamma \vdash_n C$
   c) Si $A \supset B, \Gamma \vdash_n C$, entonces $B, \Gamma \vdash_n C$
4. Mostrar que $L\supset$ no es invertible respecto a la primera premisa (Ayuda: usar $L\bot$ y $R\supset$).

5. Probar (height preserving) Contracción: si $D, D, \Gamma \vdash_n C$, entonces $D, \Gamma \vdash_n C$, para cualquier D.

6. Probar eliminación de corte para **G3i** donde la regla de corte es

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash C}{\Gamma, \Gamma' \vdash C}\,Cut$$

Ejercicio 12 Considere el siguiente sistema donde Γ y Δ son *conjuntos* de fórmulas formados con variables proposicionales e implicación.

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A, \Delta}\,Ax$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \supset B, \Delta}\supset_i \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash A \supset B, \Delta}{\Gamma \vdash B, \Delta}\supset_e$$

Observar que se trata de un sistema de deducción natural pero con múltiples conclusiones. Mostrar que:

1. Pueden derivarse los tres axiomas de lógica minimal clásica:
   - $A \supset (B \supset A)$
   - $(A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset B) \supset (A \supset C)$
   - $((A \supset B) \supset A) \supset A$ (Pierce)

2. Es equivalente al fragmento implicacional de lógica minimal clásica en presentación de cálculo de secuentes.

Referencias

[NvP01] Sara Negri and Jan von Plato. *Structural proof theory.* Cambridge University Press, 2001.