Práctica del Isomorfismo de C-de B-H para IL

Eduardo Bonelli

TP para LP – 2012C1

Ejercicio 1 Decorar las derivaciones de las fórmulas del primer ejercicio de la práctica de Deducción Natural.

Ejercicio 2 Completar la definición de la correspondence $(\!|\bullet|\!)$ dada en clases y probar que si $\rhd_{\mathbf{Ni}} \vdash A$ entonces existe un término $M^{(\!|A|\!)}$. Conversamente, mostrar que si existe un término M^A (donde ahora A es un tipo) entonces existe Γ tal que $\rhd_{\mathbf{Ni}}\Gamma \vdash A$.

Ejercicio 3 Probar que $\mathbf{Ni}^{\supset}$ es consistente en el sentido que $\perp$ on es demostrable: $\not\rhd \vdash\perp$. Para ello proceder por el absurdo asumiendo que sí es demostrable. Llamar M al término que codifica la derivación y apelar a WN y un análisis de las formas normales.

Ejercicio 4 En la teórica se presentó la siguiente asignación de términos a derivaciones de CS pasando por DN:

$$\frac{x : A \in \Gamma}{\Gamma \vdash x : A}\,\mathrm{Ax} \qquad \frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash M : B}{\Gamma, x : A \vdash M\{y := x\} : B}\,Cont$$

$$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash \lambda x^A.M : A \to B}\,R\supset \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \quad \Gamma, y : B \vdash N : A}{\Gamma, z : A \supset B \vdash N\{y := z\,N\} : A}\,L\supset$$

1. Probar que todos los términos tipables por este sistema están en forma normal.

2. Extender dicha asignación a la conjunción y la disyunción.

Ejercicio 5 Considere el cálculo **LJT** visto en la teórica pero con la asignación de términos de CS que pasa por DN:

$$\frac{}{\Gamma; x : A \vdash x : A} \qquad \frac{\Gamma, x : A; y : A \vdash M : B}{\Gamma, x : A; \vdash M\{y := x\} : B}\,Cont$$

$$\frac{\Gamma; \vdash M : A \quad \Gamma; y : B \vdash N : C}{\Gamma; z : A \supset B \vdash N\{y := z\,M\} : C}\,L\supset \qquad \frac{\Gamma, x : A; \vdash MB}{\Gamma; \vdash \lambda x^A.M : A \supset B}\,R\supset$$

Asumiendo,

- $D = C_1 \supset C_2 \supset \ldots \supset C_p \supset B$;
- $\Gamma = y : D, x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n$; y
- $\Gamma; \vdash M_i : C_i$ es derivable ($i \in 1..p$).

Dar una derivación en **LJT** de:

$$; \vdash \lambda x_1^{A_1}.\ldots.\lambda x_n^{A_n}.y^D\, M_1\, \ldots\, M_p : A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset B$$

Ejercicio 6 Mostrar que las derivaciones libres de corte en **LJT** están en correspondencia biyectiva con los términos de $\lambda_\to$ en forma normal.

Ejercicio 7 Para cada esquema de reducción de **LJT**, construir la derivación de cada lado del esquema y verificar que resulta de una paso de eliminación de corte.

Ejercicio 8 Hemos visto que usar marcadores o usar la CDC da lo mismo desde el punto de vista de la demostrabilidad. Pero a la hora de analizar la normalización de derivaciones la situación es diferente. Sean P y Q variables proposicionales. Considere el λ-término:

$$t'[v^P, u^Q] = (\lambda v^P.t[u^Q, v^P])\, t[v^P, u^Q] : Q$$

donde

$$t[v^P, u^Q] = (\lambda u^Q.v^P)\, [(\lambda v^P.u^Q)\, [(\lambda u^Q.v^P)\, (u^Q)]] : P$$

Construya la derivación de $t'[v^P, u^Q]$ y analice el resultado de realizar dos pasos de normalización. ¿Qué sucede con el proceso de normalización?

Ejercicio 9 Considere la siguiente codificación de términos de $\lambda_{\to,\times}$ en TPC_{ES}:

$$
\begin{array}{rcl}
(\!|x^A|\!) & \stackrel{\text{def}}{=} & x^A \\
(\!|\lambda x^A.M^B|\!) & \stackrel{\text{def}}{=} & \lambda x^A.(\!|M^B|\!) \\
(\!|\mathtt{inl}(M^A)^{A+B}|\!) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathtt{inl}((\!|M^A|\!)) \\
(\!|\mathtt{inr}(M^B)^{A+B}|\!) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathtt{inr}((\!|M^B|\!)) \\
(\!|\pi_i(M^A)|\!) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathsf{let}\ (\!|M^A|\!)\ \mathsf{be}\ \langle x_1, x_2\rangle^{A\times B}\ \mathsf{in}\ x_i \\
(\!|(M\,N)^B|\!) & \stackrel{\text{def}}{=} & \mathsf{let}\ (\!|M^{A\to B}|\!)\ \mathsf{be}\ \#z^{A\to B}\ \mathsf{in}\ (z\ \mathsf{of}\ (\!|N^A|\!)\ \mathsf{is}\ y^B\ \mathsf{in}\ y)
\end{array}
$$

1. Probar que $\vdash (\!|M^A|\!) : A$ es derivable en $\lambda_{\to,\times}$.
2. Probar que TPC_{ES} puede simular un paso de β: $M^A \to_\beta N^A$ implica $(\!|M^A|\!) \to^+_{TPC_{ES}} (\!|N^A|\!)$.

Ejercicio 10 Escribir la derivación asociada a los lados izquierdos y derechos de cada regla de reducción de TPC_{ES} y constate que reflejan el proceso de eliminación de corte.