Teoría de Pruebas para Lenguajes de Programación

Parcial – 05/Jul/2012

Ejercicio 1 Considere los siguientes esquemas de inferencia:

$$\frac{\Gamma, A_i \vdash C}{\Gamma, A_0 \wedge A_1 \vdash C}\, L\wedge_i, i \in \{0,1\} \qquad \frac{\Gamma \vdash A_0 \quad \Gamma \vdash A_1}{\Gamma \vdash A_0 \wedge A_1}\, R\wedge$$

$$\frac{\Gamma, A_0, A_1 \vdash C}{\Gamma, A_0 \wedge A_1 \vdash C}\, L\wedge' \qquad \frac{\Gamma_0 \vdash A_0 \quad \Gamma_1 \vdash A_1}{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash A_0 \wedge A_1}\, R\wedge'$$

Podría combinarse uno de $\{L\wedge_{0,1}, L\wedge'\}$ con uno de $\{R\wedge, R\wedge'\}$. Cualquiera de estas combinaciones son equivalentes **en presencia de** los esquemas estructurales de contracción y weakening.

Mostrar que $(L\wedge', R\wedge')$ es equivalente a $(L\wedge_{0,1}, R\wedge)$.

Ejercicio 2 Considere el siguiente cálculo de secuentes.

$$A \vdash A \qquad \frac{\Gamma, A_0, A_1 \vdash B}{\Gamma, A_0 \star A_1 \vdash B}\, L\star \qquad \frac{\Gamma_0 \vdash A_0 \quad \Gamma_1 \vdash A_1}{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash A_0 \star A_1}\, R\star \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\, Cut$$

Mostrar que goza de eliminación de corte.

Nota: si se reemplazan $(L\star, R\star)$ por $(L\sqcap_{0,1}, R\sqcap)$ también vale este resultado:

$$\frac{\Gamma, A_i \vdash C}{\Gamma, A_0 \sqcap A_1 \vdash C}\, L\sqcap_i, i \in \{0,1\} \qquad \frac{\Gamma \vdash A_0 \quad \Gamma \vdash A_1}{\Gamma \vdash A_0 \sqcap A_1}\, R\sqcap$$

Ejercicio 3 Considere el el siguiente cálculo de secuentes.

$$A \vdash A \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma', A \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\, Cut$$

$$\frac{\Gamma, A_0, A_1 \vdash B}{\Gamma, A_0 \star A_1 \vdash B}\, L\star \qquad \frac{\Gamma_0 \vdash A_0 \quad \Gamma_1 \vdash A_1}{\Gamma_0, \Gamma_1 \vdash A_0 \star A_1}\, R\star$$

$$\frac{\Gamma, A_0, A_1 \vdash B}{\Gamma, A_0 \odot A_1 \vdash B}\, L\odot \qquad \frac{\Gamma \vdash A_0 \quad \Gamma \vdash A_1}{\Gamma \vdash A_0 \odot A_1}\, R\odot$$

1. Mostrar que no goza de eliminación de corte.
2. Mostar que puede definirse la contracción a izquierda como regla derivada.

Ejercicio 4 Los fórmulas de Multiplicative-Additive Linear Logic (**MALL**) son:

$$A \quad ::= \quad \mathbf{1} \mid P \mid A \sqcap B \mid A \star B \mid A \sqcup B \mid A \multimap B$$

Los esquemas de inferencia:

$$\frac{}{A \vdash A}\,Ax \qquad \frac{\Gamma \vdash A \quad A, \Gamma' \vdash B}{\Gamma, \Gamma' \vdash B}\,Cut$$

$$\frac{\Gamma, A_0 \vdash C}{\Gamma, A_0 \sqcap A_1 \vdash C}\,L\sqcap_0 \qquad \frac{\Gamma, A_1 \vdash C}{\Gamma, A_0 \sqcap A_1 \vdash C}\,L\sqcap_1 \qquad \frac{\Gamma \vdash A_0 \quad \Gamma \vdash A_1}{\Gamma \vdash A_0 \sqcap A_1}\,R\sqcap$$

$$\frac{\Gamma, A_0, A_1 \vdash B}{\Gamma, A_0 \star A_1 \vdash B}\,L\star \qquad \frac{\Gamma \vdash A_0 \quad \Gamma' \vdash A_1}{\Gamma, \Gamma' \vdash A_0 \star A_1}\,R\star$$

$$\frac{A, \Gamma \vdash C \quad B, \Gamma \vdash C}{A \sqcup B, \Gamma \vdash C}\,L\sqcup \qquad \frac{\Gamma \vdash A_0}{\Gamma \vdash A_0 \sqcup A_1}\,R\sqcup_0 \qquad \frac{\Gamma \vdash A_1}{\Gamma \vdash A_0 \sqcup A_1}\,R\sqcup_1$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad B, \Gamma' \vdash C}{A \multimap B, \Gamma, \Gamma' \vdash C}\,L \multimap \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \multimap B}\,R \multimap$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \mathbf{1} \vdash A}\,L\mathbf{1} \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}}\,R\mathbf{1}$$

Probar las siguientes fórmulas en **MALL**:

1. $(A \multimap C) \sqcap (B \multimap C) \multimap ((A \sqcup B) \multimap C)$
2. $A \multimap (B \multimap C) \equiv A \star B \multimap C$

Intentar probar:

1. $(A \multimap C) \star (B \multimap C) \multimap ((A \sqcup B) \multimap C)$
2. $A \multimap (B \multimap C) \equiv A \sqcap B \multimap C$

Ejercicio 5 Dado que **MALL** no permite contracción ni weakening su poder expresivo es limitado (ni siquiera puede embeberse la lógica intuicionista proposicional). Para remediar eso se define Intuitionistic Linear Logic (**ILL**) que resulta de tomar **MALL** y agregar esquemas estructurales **pero** de manera **controlada**. La fórmula $!A$ puede leerse informalmente como "A puede usarse múltiples veces (cero o más)".

$$\frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,W \qquad \frac{\Gamma, !A, !A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,C \qquad \frac{!\Gamma \vdash A}{!\Gamma \vdash !A}\,Promotion \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma, !A \vdash B}\,Dereliction$$

Considere la siguiente traducción de Girard:

$$\begin{array}{rcl} P^\circ & \stackrel{\text{def}}{=} & P \\ (A \wedge B)^\circ & \stackrel{\text{def}}{=} & A^\circ \sqcap B^\circ \\ (A \vee B)^\circ & \stackrel{\text{def}}{=} & !A^\circ \sqcup !B^\circ \\ (A \supset B)^\circ & \stackrel{\text{def}}{=} & !A^\circ \multimap B^\circ \end{array}$$

Probar que es un *embedding*: $\rhd_{\mathbf{G2m}} \Gamma \vdash A$ sii $\rhd_{\mathbf{ILL}} !\Gamma^\circ \vdash A^\circ$