

Intuicionismo matemático y semántica basada en el concepto de demostración

CURSO TEORIA DE LA PRUEBA PARA LENGUAJES DE
PROGRAMACION- DC-UBA-2012

Javier Legris
CEF-CONICET y FCE-UBA
jlegris@retina.ar

IM & PTS (TPLP-2012)

Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966)

1. “El fenómeno primordial aquí no es más que la intuición del tiempo, en la cual es posible la repetición de `cosa en el tiempo y de nuevo una cosa´, y sobre cuya base momentos de vida pueden descomponerse en secuencias de cosas diferentes cualitativamente diferentes; estas se concentran subsiguientemente en el intelecto como secuencias matemáticas, no sentidas (*sensed*), sino percibidas.” (Brouwer 1907 p. 81)
2. “... La intuición de la duo-unidad [*two-oneness*], la intuición primordial de la matemática que crea inmediatamente no sólo los números uno y dos, sino todos los números ordinales finitos...” (Brouwer 1912, p. 12)
7. “La matemática intuicionista es una estructura mental esencialmente no lingüística” (Brouwer 1947, p. 339).

IM & PTS (TPLP-2012)

Sobre el concepto de demostración

10. “Para la construcción de la matemática no es necesaria la introducción de leyes lógicas válidas universalmente. Estas leyes son, en cierto modo, descubiertas una y otra vez en cada caso individual respecto del sistema matemático que se esté considerando.” (Heyting 1929, p. 42)
11. “En la matemática intuicionista no se infiere de acuerdo con normas que estén contenidas en una lógica, sino que cada inferencia [*Schluß*] individual es probada de manera inmediata por su evidencia. El núcleo de una demostración matemática no se encuentra en las inferencias lógicas, sino en la construcción de sistemas matemáticos [...] El resultado de estas reflexiones se pueden resumir diciendo que, de un lado, la matemática es independiente de la lógica, y, de otro lado, que la lógica pertenece a las aplicaciones de la matemática.” (Heyting 1934, p. 13)
- 12 “Los teoremas lógicos son teoremas matemáticos. La lógica no es el fundamento de la matemática; por el contrario, conceptualmente es una parte complicada y sofisticada de la matemática” (Heyting 1974, p. 87)
13. “Una demostración [*Beweis*] de una proposición es una construcción matemática que puede ser ella misma tratada matemáticamente.” (Heyting 1931, p. 114)

IM & PTS (TPLP-2012)

Los principios de la lógica

9. “Los principios lógicos son válidos únicamente para palabras con un significado matemático.” (Brouwer 1907, p. 163)
14. “... para sistemas infinitos el principio del tercero excluido no es, por ahora, un principio confiable.” (Brouwer 1908, p. 6)
16. “Este examen da [...] un resultado negativo para el principio del tercero excluido, es decir, se muestra que no corresponde realidad matemática alguna a las formulaciones de este último principio y a las consecuencias que descansan en él.” (Brouwer 1929, pp. 160 s.)
17. “Se puede afirmar este teorema [el TND] para un determinado enunciado p únicamente si p está demostrado o si se puede retrotraer a una contradicción.” (Heyting 1931, p. 114)

Teoría General de la demostración

-Teoría reductiva de la demostración:

Programa de Hilbert (demostración de la consistencia de la aritmética por medios finitarios)

- Teoría General de la demostración (Gentzen, Prawitz, etc.)

“Las demostraciones expresadas mediante derivaciones formales es el principal objeto de estudio” (Kreisel 1971, p. 242)

IM & PTS (TPLP-2012)

Los orígenes de la interpretación BHK

La lógica intuicionista como “lógica de problemas”

“Además de la lógica teórica, que sistematiza los esquemas de demostración de la verdades teóricas, se pueden sistematizar los esquemas de resolución de problemas [*Aufgaben*], por ejemplo problemas constructivos en la geometría.” (Kolmogorov 1932, p. 58)

“Es posible introducir un simbolismo correspondiente y dar las reglas formales de cálculo para la construcción simbólica del sistema de tales esquemas para la resolución de problemas. De este modo, se obtiene, junto con la lógica teórica un nuevo cálculo de problemas [*Aufgabenrechnung*]. [...] Entonces, se da el siguiente hecho sorprendente: *En la forma, el cálculo de problemas coincide con la lógica intuicionista de Brouwer, recientemente formalizada por el señor Heyting.*” (Kolmogorov 1932, p. 58)

“Se mostrará que esta [la lógica intuicionista] debería ser reemplazada por el cálculo de problemas, pues sus objetos no son, en realidad, enunciados teóricos, sino más bien problemas.” (Kolmogorov 1932, p. 58)

IM & PTS (TPLP-2012)

La Proof-theoretic Semantics

La idea original de Gentzen

“Las introducciones representan, por así decirlo, las ‘definiciones’ de los símbolos en cuestión, y las eliminaciones son, a final de cuentas, tan sólo consecuencias de aquellas. Esto puede expresarse del modo siguiente: En la eliminación de un signo, podemos usar aquella fórmula, de cuyo signo principal nos estamos ocupando, únicamente ‘como aquel que tiene significado sobre la base de la introducción de ese signo.’” (Gentzen 1934-1935, p. 189)

IM & PTS (TPLP-2012)

La Proof-theoretic Semantics

“Según la concepción de la teoría de modelos, la cual prevalece todavía en la lógica [...] una consecuencia es lógicamente válida si transmite la verdad de sus premisas a su conclusión, en relación con toda interpretación. Se muestra que los sistemas de demostración son correctos probando que las consecuencias que ellos generan son lógicamente válidas. [...] La semántica basada en la teoría de la demostración procede al revés, asignando a las demostraciones o deducciones un papel semántico autónomo desde el principio antes que elucidar su función en términos de transmisión de verdad. En la semántica basada en la teoría de la demostración, las demostraciones son [...] tratadas [...] como entidades en términos de las cuales se puede elucidar el significado y la consecuencia lógica.” (Kahle & Schroeder-Heister 2006, p. 503)

Intuicionismo matemático y semántica basada en el concepto de demostración

Referencias

- Benacerraf, Paul & Hilary Putnam. 1983. *Philosophy of Mathematics. Selected Readings*. Cambridge (U.K.) et al., Cambridge University Press.
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1907. *Over de grondslagen der wiskunde*. Tesis doctoral, Amsterdam. Reimpr. Amsterdam, Mathematisch Centrum, 1981. Trad. inglesa en *Collected Works Vol. I*, comp. por Arendt Heyting. Amsterdam, North-Holland.
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1908. "De onbetrouwbaarheid der logische principes". *Tijdschrift voor Wijsbegeerte* 2, 152-158
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1913. "Intuitionism and Formalism". *Bull. Amer. Math. Soc.* 20, pp. 81-96. Reimpreso en Brouwer 1975.
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1929. "Mathematik, Wissenschaft und Sprache". *Monatshefte für Mathematik und Physik* 36, 153-164.
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1952. "Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism". *South-African J. Sci.* 49, pp. 139-146. Reimpreso en Brouwer 1975.
- Brouwer, Luitzen Egbertus Jan. 1975. *Collected Works*. Comp. por Arendt Heyting. Amsterdam, North-Holland.
- Dummett, Michael. 1978. "The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic". En *Truth on Other Enigmas*, Londres, Duckworth, pp. 215-247.
- Dummett, Michael. 1991. *The Logical Basis of Metaphysics*. Cambridge (Mass.), Harvard University Press.
- Gentzen, Gerhard. 1934-1935. "Untersuchungen über das logische Schließen". *Mathematische Zeitschrift* 39, pp. 176-210 y 405-431. Trad. inglesa en *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, comp. por M. E. Szabó. Amsterdam, North-Holland, 1968.
- Glivenko, V.I. 1929. "Sur quelques points de la logique de M. Brouwer". *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl.Sci.*, Ser. 5, 15, 183-188.
- Haack, Susan. 1973. *Deviant Logic*. Cambridge, Cambridge, University Press.
- Heyting, Arendt. 1931. "Die intuitionistische Grundlegung der Mathematik". *Erkenntnis* 2, 106-115
- Heyting, Arendt. 1930. "Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik". *Sitzungsber. preuss. Ak. Wiss. Phys.- Math. Klasse II*, 42-56.
- Heyting, Arendt. 1934. *Mathematische Grundlagenforschung. Intuitionismus. Beweistheorie*. Berlin, Springer, 1934.
- Heyting, Arendt. 1956. *Intuitionism. An Introduction*. Amsterdam-Londres, North-Holland.
- Kahle, Reinhard & Peter Schroeder-Heister. 2006. "Introduction: Proof-Theoretic Semantics". *Synthese* 148, pp. 503-506.
- Kolmogorov, Andrei N. 1932. "Zur Deutung der intuitionistischen Logik". En *Mathematische Zeitschrift* 35, pp. 58-65.
- Kreisel, Georg. 1962. "Foundations of Intuitionistic Logic". En *Logic, Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1960 International Congress*, comp. por Ernest Nagel, Patrick Suppes & Alfred Tarski. Stanford (Cal.), Stanford University Press, pp. 198-210.
- Kreisel, Georg. 1971. Reseña de *The Collected Papers of Gerhard Gentzen*, comp. por M. E. Szabó. En *The Journal of Philosophy* 68, pp. 238-265.
- Kutschera, Franz von. 1968. "Die Vollständigkeit des Operatorensystems $\{\neg, \wedge, \vee, \supset\}$ für die intuitionistische Aussagenlogik im Rahmen der Gentzensemantik". *Archiv für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 11 (1968), pp. 3-16. Repr. en *Ausgewählte Aufsätze*, Paderborn, Mentis, 2004, pp. 31- 46.

- Legris, Javier. 1994. "Ideas acerca de los conceptos de demostración y de verdad matemática". *Análisis Filosófico* 14, pp. 149-159.
- Legris, Javier. 1999. "Observaciones sobre el desarrollo de la teoría de la demostración y su relevancia para la filosofía de la lógica". En *Revista Patagónica de Filosofía* 1 (1999), pp. 115-132.
- Legris, Javier. 2008. "Intención y conflicto: sobre la interpretación de la negación en el intuicionismo matemático". En *O que nos faz pensar. Cadernos do Departamento de Filosofia da PUC-Rio* 23 (2008), pp. 77-89.
- Martin-Löf, Per. 1991. "A Path from Logic to Metaphysics". *Atti del Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della Scienza*, vol. II, Bologna, CLUEB, pp. 141-149.
- Martin-Löf, Per. 1995. "Verificationism Then and Now". En *The Foundational Debate. Complexity and Constructivity in Mathematics and Physics*, comp. por Werner DePauli-Schimanovich *et al.*, Dordrecht *et al.*, Kluwer, pp. 187-196.
- Martin-Löf, Per. 1996. "On the Meanings of the Logical Constants and The Justification of Logical Laws". *Nordic Journal of Philosophical Logic*, 1, pp. 11-60.
- Placek, Tomasz. 1999. *Mathematical Intuitionism and Intersubjectivity*. Dordrecht *et al.*, Kluwer.
- Prawitz, Dag. 1977. "Meaning and Proofs: On the Conflict between Classical and Intuitionistic Logic". *Theoria* 43, pp. 2-40
- Prawitz, Dag. 1978. "Proofs and the Meaning and Completeness of the Logical Constants". En *Essays on Mathematical and Philosophical Logic*, comp. por J. Hintikka, I. Niiniluoto & E. Saarinen. Dordrecht, Reidel, pp. 25-40.
- Prawitz, Dag. 1998. "Truth and Objectivity from a Verificationist Point of View". En *Truth in Mathematics*, comp. por H. G. Dale *et al.* Oxford, Clarendon Press, pp. 41-51.
- Stig, Walter P. van. 1990. *Brouwer's Intuitionism*. Amsterdam *et al.*, North-Holland
- Sundholm, Göran. 1983. "Constructions and The Meanings of Logical Constants". En *Journal of Philosophical Logic* 12, pp. 151-172.
- Troelstra, Anne S. 1969. *Principles of Intuitionism*. Heidelberg-N.York, Springer.
- Troelstra, Anne S. & Dirk van Dalen. 1988. *Constructivism in Mathematics. An Introduction* (2 vols.). Amsterdam *et al.*, North-Holland.
- Van Dalen, Dirk. 1973. "Lectures on Intuitionism". In *Cambridge Summer School in Mathematical Logic* ed. by A.R.D. Mathias and H. Rogers. Berlin-Heidelberg-New York, Springer, 1-94.